A02　非平衡系におけるリズミックな時空間パターンのダイナミクスと制御

東京工業大学大学院情報理工学研究科　中尾裕也

非平衡散逸系の時空間パターンは、流体現象、化学反応現象、生命現象などを主な題材として、活発に研究されている。特に、リズミックな時空間パターンの形成は，非平衡状態にある流体系や化学反応系、生命現象等に幅広く観察される一般的性質であり、実世界の様々な系に普遍的に観察され、重要な機能的意義を持つこともある。一般に、それらの系は反応拡散方程式や流体方程式に代表される非線形偏微分方程式によってモデル化されることが多く、その解析的な扱いは難しい。しかし、いくつかの限られた状況では、系を低次元の常微分方程式に系統的に近似して詳しく解析することができ、そのような手法は一般に縮約理論と呼ばれる。本研究の目的は、リズミックな時空間パターンに対して一般的に適用可能な位相縮約理論を構築することと、構築した理論を非平衡パターンに適用して、そのダイナミクスと応答特性を明らかにし、効果的な制御法などを提案することであった。

平成 26 年度の研究では、従来の低次元力学系の非線形振動に対する位相縮約理論[2]を、無限次元の力学系である反応拡散系のリズミックな時空間パターン[1]や、Hele-Shaw セル中の流体の振動的熱対流に対して拡張できることを示し、それらの系の同期現象などを議論した。例えば、空間分布した化学反応系を記述する典型的なモデルである反応拡散系は、時刻tでの空間の各点 $\boldsymbol{r}$における複数の化学物質の濃度の組を$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r},t)$、拡散定数の行列を$D$として

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r},t),\boldsymbol{r})+D\nabla^2\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t)$$

と表される。ここで$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t)$は系に与えられる弱い摂動を表す。この偏微分方程式が摂動を受けていない状況において安定なリミットサイクル振動解$\boldsymbol{X_0}(\boldsymbol{r},t)$を持つときに、このリミットサイクルとその吸引領域に、系の空間パターンの位相を与える汎関数$\Theta\{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r},t)\}$を導入することによって、弱い摂動を受けて発展する空間パターンの位相$\theta(t)=\Theta\{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r},t)\}$のダイナミクスを

$$\frac{d}{dt}\theta(t)=\omega+\int\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}',\theta(t))\cdot\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}',t)d\boldsymbol{r}'$$

という位相 1 変数のシンプルな縮約方程式で近似的に記述できる。ここでωは振動数で、$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r},\theta)$は位相感受関数と呼ばれ、元の反応拡散系のリミットサイクル解に関する線形化随伴方程式の周期解として得られる。これは微小摂動が系の非線形振動の長時間後の位相にどのような変化を及ぼすかを定量化するもので、位相縮約理論における本質的な量である。

平面上の 2 成分の反応拡散系の例として、FitzHugh-南雲モデルのリミットサイクル解であるスパイラルパターンとその位相感受関数の例を図 1 に示す。スパイラルコア付近で摂動に対するパターンの感受性が高いことが分かる。図 2 にこの結果を用いてふたつのスパイラル解の同期現象を解析した例を示す。この場合、系は同相同期状態と逆相同期状態の双安定となっており、初期条件によりいずれかが選択される。同期状態に至るパターンのダイナミクスは、縮約された位相方程式によって定量的に予言することができる[1]。

平成 27 年度の研究では、同様の考え方に基づく流れ場の非線形振動の解析を目的として、格子ボルツマン法によって記述される流れ場の非線形振動に対する位相縮約法を発展させた。流体系の典型的な非線形振動現象として、流れ場中に置いた障害物によって生じる周期的なカルマン渦列を対象とし、その摂動に対する位相感受関数を求めて位相方程式を導出し、これを用いて周期的な外力による流れ場の同期現象を解析した。格子ボルツマン法のアルゴリズムが決定論的な力学系と見なせるという性質を利用して、周期的なカルマン渦列に対応するリミットサイクル振動状態にある格子ボルツマン系に対して、その位相感受関数を与える随伴方程式を導出し、これを数値的に解くことによって位相感受関数を求めた。数値計算により系の流れ場に摂動を与えて直接測定した位相応答関数との比較も行い、随伴方程式から得た位相感受関数の妥当性を確認した。これにより、弱摂動を受ける周期的なカルマン渦列についても位相縮約できることが分かった。図 3 に流れ場の様子のスナップショットを、図 4 に対応する位相感受関数のスナップショットを示す（これらの計算結果は共同研究者の戸丸洋輔氏によって得られたものである）。この位相感受関数を用いて、スパイラルの場合と同様に、弱い周期外力によるカルマン渦列の同期現象などを定量的に議論できる。

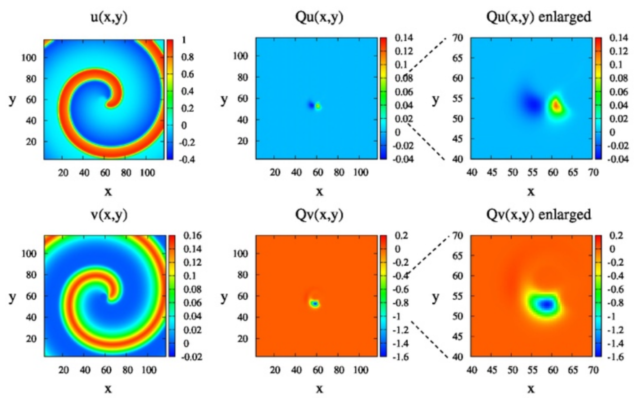

図 1．反応拡散系のスパイラル解と位相感受関数

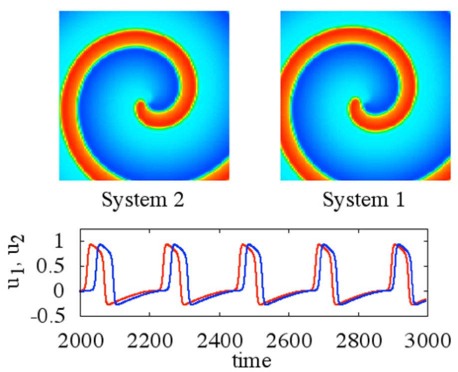

図 2．ふたつのスパイラルの同期現象

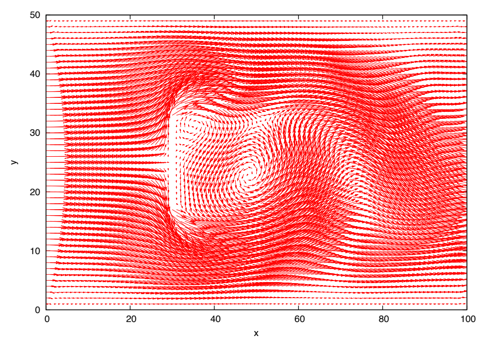

図 3．カルマン渦列の流れ場

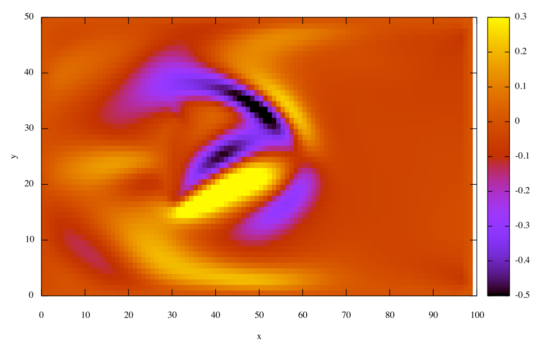

図 4．カルマン渦列の位相感受関数

参考文献：

(1) Hiroya Nakao, Tatsuo Yanagita, and Yoji Kawamura, "Phase reduction approach to synchronization of spatiotemporal rhythms in reaction-diffusion systems", Physical Review X **4**, 021032 (2014).

(2) Hiroya Nakao, "Phase reduction approach to synchronization of nonlinear oscillators", Contemporary Physics **57**, 188-214 (2016).